

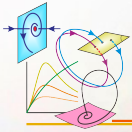


Berkenalan dengan Geometri Fraktal

Marwan

marwan.math@unram.ac.id

Lecture Series, 21 Juli 2020



Outline



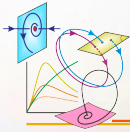
Sekelumit cerita awal..

Konstruksi Ruang Fraktal

Titik tetap pemetaan kontraktif

Sistem Fungsi Iterasi

Dimensi Fraktal



Sekelumit cerita awal..



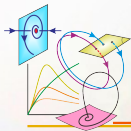
Pandanglah barisan-barisan berikut:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \longrightarrow 0$$

$$1, \left(1 + \frac{x}{1!}\right), \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right), \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right), \dots \longrightarrow e^x$$



- Hidup di ruang manakah makhluk-makhluk dalam barisan-barisan itu?
- Ingatkah 'kisah' tentang Cantor Set di kuliah analisis? Sebuah himpunan yang punya sifat interval (*uncountble*) tetapi panjangnya nol.



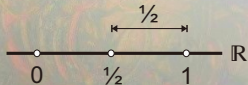
Sekelumit cerita awal..

Jarak vs metrik



- Jarak titik 1 ke titik $\frac{1}{2}$ adalah $|1 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$
- Jarak titik x ke titik y adalah $|x - y|$
- Metrik (abstraksi jarak) di \mathbb{R}^2 adalah pemetaan $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, memenuhi
 - M1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$,
 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
 - M2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
 - M3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$
- Ruang \mathbb{R}^2 bersama jarak d , disimbolkan (\mathbb{R}^2, d) adalah

contoh ruang metrik.



$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = r$$

mendefinisikan lingkaran



Sekelumit cerita awal..

Beberapa metrik dan akibatnya



- Lingkaran dalam berbagai ruang metrik



L_1 adalah lingkaran di ruang metrik (\mathbb{R}^2, d_1) ,

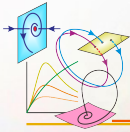
$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

L_2 adalah lingkaran di ruang metrik (\mathbb{R}^2, d_2) ,

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

L_3 adalah lingkaran di ruang metrik (\mathbb{R}^2, d_3) ,

$$d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$



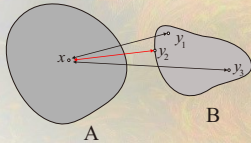
Konstruksi Ruang Fraktal

Jarak Hausdorff

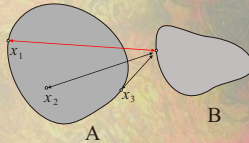


- Misalkan diberikan ruang metrik (X, d) , $A, B \subseteq X$, A dan B masing2 kompak (*compact set*)

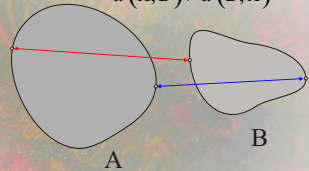
$$d(x, B) = \min \{d(x, y) | y \in B\}$$



$$d(A, B) = \max \{d(x, B) | x \in A\}$$



$$d(A, B) \neq d(B, A)$$

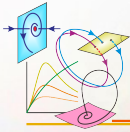


- Didefinisikan himpunan

$$\mathcal{H}(X) = \{A | A \neq \emptyset, A \subseteq X, A \text{ kompak}\}$$

- Jarak Hausdorff

$$h_d(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$



Konstruksi Ruang Fraktal

Ruang Fraktal



■ Sifat:

h_d adalah suatu metrik pada $\mathcal{H}(X)$.

Diperoleh suatu ruang metrik $(\mathcal{H}(X), h_d)$.

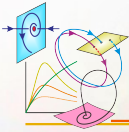
■ Teorema:

Ruang metrik $(\mathcal{H}(X), h_d)$ adalah suatu ruang metrik lengkap.

■ Ruang metrik lengkap $(\mathcal{H}(X), h_d)$ dikenal sebagai **Ruang Fraktal**.

...lebih jauh, rujuklah misalnya:

Barnsley, M.F.(1993), Fractals Everywhere, 2nd. ed., Academic Press.



Titik tetap pemetaan kontraktif



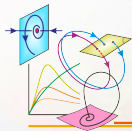
- Agarwal, et al., 2018, Fixed Point Theory in Metric Space, Springer

Theorem 1.1 (Banach contraction principle) *Let (X, d) be a complete metric space. Let $T : X \rightarrow X$ be a contraction mapping, with Lipschitz constant $k < 1$. Then*

- (i) *T has a unique fixed point $x^* \in X$.*
- (ii) *For every $x \in X$, the Picard sequence $\{T^n x\}$ converges to x^* .*
- (iii) *We have the following estimate: For every $x \in X$,*

$$d(T^n x, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, Tx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- x^* di dalam teorema di atas dalam ruang fraktal dikenal sebagai **atraktor**.
- Cantor Set, Sierpinski Triangle, Julia Set, dll. adalah contoh-contoh atraktor.
- Atraktor fraktal ber**dimensi** tak bulat.



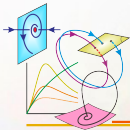
Sistem Fungsi Iterasi



- Sistem Fungsi Iterasi (SFI) adalah sistem yang terdiri atas suatu Ruang Metrik Lengkap (X, d) dan pemetaan kontraksi $w_n : X \rightarrow X$ dengan faktor kontraktivitas $s_n, n = 1, 2, \dots, N$ dinotasikan dengan

$$\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$$

Faktor kontraktivitas sistem adalah $s = maks \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$.



Sistem Fungsi Iterasi



■ Contoh SFI yang menghasilkan Sierpinski triangle

$$X = \mathcal{H}(R^2)$$

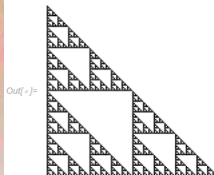
$$w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

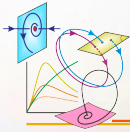
$$w_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$W = w_1 \cup w_2 \cup w_3$$

```
In[ ]:= w1[x_] := (Translate[Scale[x, 0.5], {0, 0}]);  
w2[x_] := (Translate[Scale[x, 0.5], {0, 0.5}]);  
w3[x_] := (Translate[Scale[x, 0.5], {0.5, 0}]);  
W[a_] := Union[{w1[a], w2[a], w3[a]}];  
iteration = 7;  
sierpinski =  
Graphics[  
  Nest[W, Polygon[{{0, 0}, {0, 1}, {1, 1}, {1, 0}}],  
    iteration];  
Show[sierpinski]
```

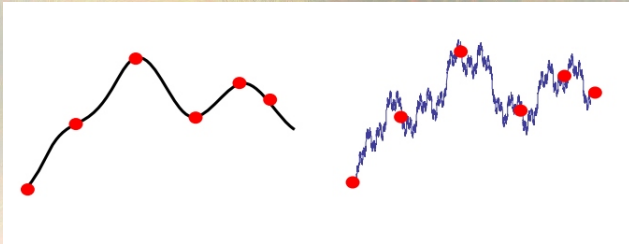


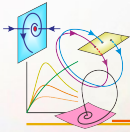


Sistem Fungsi Iterasi



- SFI juga dapat menghasilkan fungsi interpolasi fraktal





Dimensi Fraktal



- Dimensi Fraktal berkaitan dengan dimensi suatu obyek (himpunan kompak): penggal garis, keping bidang, Cantor set, Sierpinski triangle, 'sebongkah' awan(?)
- Kita telah mengenal nilai dimensi beberapa himpunan:
 - ☑ Dimensi titik = 0
 - ☑ Dimensi garis = 1
- Dimensi Topologi

Himpunan A berdimensi n , jika untuk membuat A tidak terhubung dibutuhkan himpunan berdimensi $n - 1$.





Dimensi Fraktal

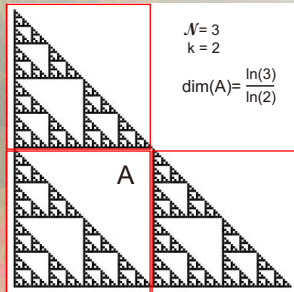


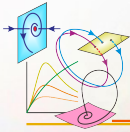
■ Dimensi Fraktal

✓ Dimensi kesebangunan diri (*self similarity*)

Jika himpunan A dapat dibagi menjadi \mathcal{N} bagian sebangun yang masing-masing dapat digandakan dengan k untuk mendapatkan A kembali, maka:

$$\dim(A) = \frac{\ln(\mathcal{N})}{\ln(k)}$$





Dimensi Fraktal



✓ **Dimensi Hitung-Kotak**
(*box-counting*)

Misalkan $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$.

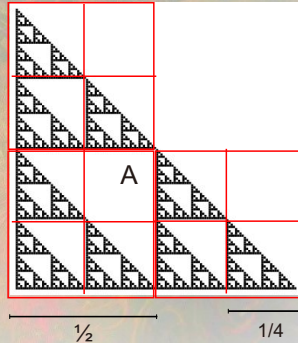
$\mathcal{N}_\delta(A)$ adalah jumlah minimal 'kotak' bersisi δ yang dapat menyelimuti A .

Jika

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathcal{N}_\delta(A))}{-\ln(\delta)}$$

maka $\dim(A) = D$.

$$\dim(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^n)}{-\ln\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$



δ	\mathcal{N}
$\frac{1}{2}$	3
$\frac{1}{4}$	9
$\frac{1}{2^n}$	3^n



APPLICATION OF FRACTAL ANALYSIS METHOD FOR STUDYING STOCK MARKET

PAPER ID: 11A01E

Sergey Vladislavovich Makletsov^a, Nadezhda Anatolevna Opokina^a,
Ilnar Kasiymovich Shafigullin^{a*}

^a Kazan Federal University, RUSSIA

Multifractal analysis of crack patterns in reinforced concrete shear walls

A. Ebrahimkhanlou¹, A. Farhidzadeh², S. Salamone^{3*}

ISSN: 2548-8082
Vol 2, No 1, Edisi 2018

Jurnal PRODUKTIF | 1
Versi online: journal.umtas.ac.id/index.php/produktif

PEMODELAN KONTUR MENGGUNAKAN INTERPOLASI FRAKTAL

Janoë Hendarto

Departemen Ilmu Komputer dan Elektronika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada
email : jhendarto@ugm.ac.id

Results in Physics 15 (2019) 102548

Contents lists available at ScienceDirect

Results in Physics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/rinp

Chaos, Solitons and Fractals 139 (2020) 110073

Contents lists available at ScienceDirect

Chaos, Solitons and Fractals

Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena

journal homepage: www.elsevier.com/locate/chaos

Check for updates

Frontiers

An analysis of COVID-19 spread based on fractal interpolation and fractal dimension

Cristina-Maria Păcurar^{a*}, Bogdan-Radu Necula^b

^a Faculty of Mathematics and Informatics, Transilvania University of Braşov, Bulevardul Eroilor 29, Braşov 500036, Romania
^b Faculty of Medicine, Transilvania University of Braşov, Bulevardul Eroilor 29, Braşov 500036, Romania

www.researchgate.net/publication/296638677

Search for Extraterrestrial Intelligence (SETI) by fractal universe

Sheena Chen, Tong-Jie Zhang

Department of Astronomy, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

Fractal based cancer modelling

Statistika - Statistical Journal - March 2016

READS
159

Philipp Hermann
Johannes Kepler University Linz
30 PUBLICATIONS 95 CITATIONS
[SEE PROFILE](#)

Milan Stehlik
Johannes Kepler University Linz
189 PUBLICATIONS 1,048 CITATIONS
[SEE PROFILE](#)

Orietta Nicolis
Universidad de Valparaíso (Chile)
54 PUBLICATIONS 244 CITATIONS
[SEE PROFILE](#)

Molecular Complexity Calculated by Fractal Dimension

Article in Scientific Reports - December 2019
DOI: 10.1038/s41598-019-57253-6

CITATION
1

2 authors, including:

Modest von Korff
Idorsia Pharmaceuticals Ltd
22 PUBLICATIONS 766 CITATIONS
[SEE PROFILE](#)

READS
107

LAPORAN PENELITIAN KARAKTERISTIK FRAKTAL MOTIF BATIK LOKAL SASAMBO



oleh:

Marwan (NIDN.0005107108)
Mustika Hadijati (NIDN.0028067004)
Desy Komalasari (NIDN.0026058402)

Dibiayai dari Sumber Dana DIPA BLU Universitas Mataram
dengan Kontrak Penelitian No. 663G/SP-BLU/UN18.12.2/PL/2013
Tahun Anggaran 2013

LAPORAN PENELITIAN Interpolasi Fraktal pada Data Curah Hujan



Oleh

Marwan
Mamika Ujianita Romdhini

Dibiayai Dana PNPB Universitas Mataram Tahun 2010
dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan Penelitian
No. 12/H18.12/PL/2010, Tanggal 15 Juli 2010