



Image Source: Bells Beach from magicseaweed.com

Model Matematika Untuk Aliran Permukaan Bebas

Dr. Lusia Krismiyati Budiasih

Department of Mathematics
Sanata Dharma University, Yogyakarta

Outline

- *Shallow Water Equations – SWE*
- *Finite Volume Method*
- *Dambreak Problem*

Bencana alam terkait dengan aliran air



Sumber: susel.suara.com

Banjir Bandang Luwu Utara (Juli 2020)

Korban (sampai 19 Juli 2020)

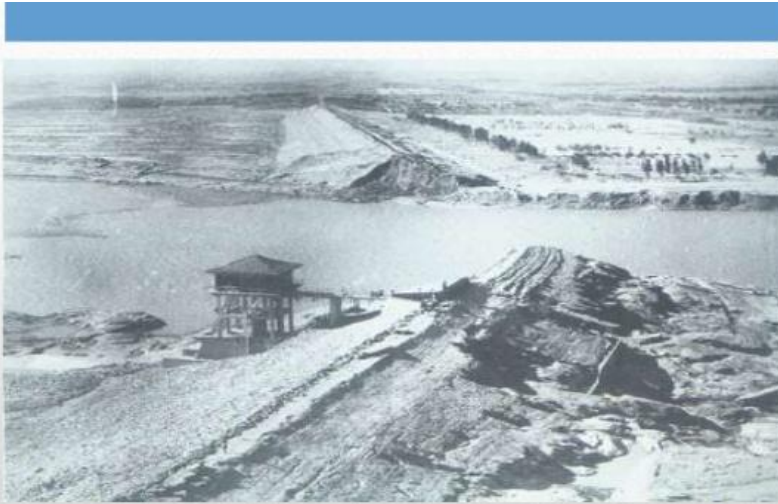
- 37 orang meninggal
- 14.483 jiwa (3.627 KK) mengungsi

Tsunami Aceh (Desember 2004)

- Dunia : ± 230.000 meninggal , ± 45.000 hilang
- Indonesia: ± 170.000 meninggal, ± 37.000 hilang



Dampak tsunami Aceh (Sumber: travel.tribunnews.com)



Banqiao Dam Failure – 1975, China

Deaths: 231,000

https://trendbuzzing.blogspot.com/2017/09/top-10-deadliest-natural-disasters_12.html

Selama abad 20

- Kurang lebih 200 bendungan dengan kedalaman lebih dari 15 m bobol.
- Total kerugian ratusan juta dollars.
- Lebih dari 8000 orang meninggal akibat bendungan bobol (tidak termasuk tsunami).
- Ratusan ribu orang meninggal karena bencana tsunami.

Ref: C. Zoppou dan S. Roberts, Applied Mathematical Modelling, 2000

Untuk mengantisipasi banjir akibat bendungan bobol dan tsunami:

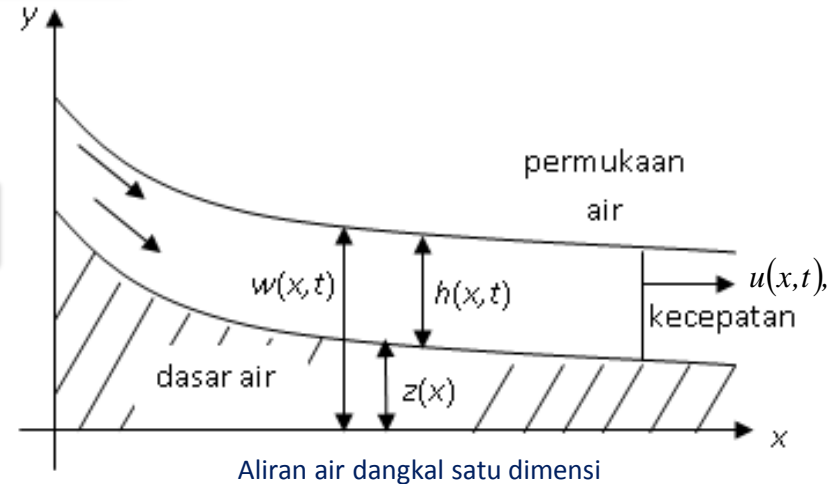
- Perencanaan sistem peringatan banjir
- Memodelkan aliran air (komputasi numerik)

Persamaan Air Dangkal (*Shallow Water Equations – SWE*)

- PDP hiperbolik
- Kekekalan massa dan momentum

Kekekalan massa - Asumsi

- Aliran air diasumsikan laminar
- Densitas atau massa jenis air di setiap titik adalah konstan.
- Dasar air diasumsikan kedap



Massa jenis pada suatu kedalaman di sebarang titik

$$\bar{\rho}(x,t) = \int_{z(x)}^{w(x,t)} \rho dy = \rho(w(x,t) - z(x)) = \rho h(x,t)$$

Total massa (m) di ruang kontrol $[x_1, x_2]$

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho}(x,t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho h(x,t) dx$$

Fluks massa: laju aliran air yang melalui sebarang titik (x,t) pada suatu kedalaman

$$f_1 = \bar{\rho}(x,t)u(x,t) = \rho h(x,t)u(x,t)$$

Dengan asumsi bahwa dasar air bersifat kedap, laju perubahan masa pada $[x_1, x_2]$ ditentukan dari perbedaan fluks pada x_1 dan x_2 :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h(x,t) dx = \rho h(x_1,t)u(x_1,t) - \rho h(x_2,t)u(x_2,t) \quad (1)$$

→ Bentuk integral kekekalan massa

Persamaan kekekalan massa

$$h_t + (hu)_x = 0$$

Bentuk lain persamaan (1)

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho h(x,t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho h(x,t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \rho h(x_1,t)u(x_1,t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \rho h(x_2,t)u(x_2,t) dt$$

Atau

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho h(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho h(x,t)u(x,t)) \right\} dx dt = 0$$

Kekekalan momentum - Asumsi

- Fluida memiliki tekanan hidrostatis: $P = \rho gy$
- Perubahan momentum hanya disebabkan oleh momentum yang mengalir melalui batas

Total momentum dari pergerakan air di sebarang ruang kontrol

$$p(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho h(x, t) u(x, t) dx.$$

Laju perubahan momentum

$$\frac{d}{dt} p(t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho g h(x, t) u(x, t) dx + \rho h(x_2, t) u^2(x_2, t) - \rho h(x_1, t) u^2(x_1, t)$$

Dengan ekspansi Taylor, persamaan dapat ditulis dalam bentuk persamaan Euler

$$(\rho h u)_t + (\rho h u^2 + p)_x = -\rho g h z_x$$

Persamaan kekekalan momentum

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)_x = -ghz_x$$

Persamaan air dangkal (SWE)

$$h_t + (hu)_x = 0$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)_x = -ghz_x$$

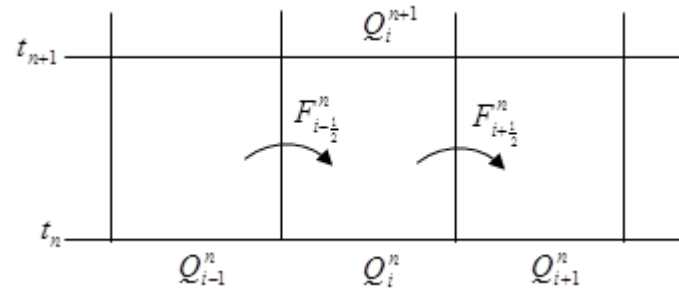
Bentuk konservatif SWE

$$q_t + f(q)_x = s$$

dengan

$$q = \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad f = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2} gh^2 \end{bmatrix}$$

Metode Volume Hingga (Finite Volume Method – FVM)



Q_i^n : aproksimasi dari nilai rata-rata q pada interval ke- i pada waktu t_n

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x, t_n) dx \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx,$$

dengan $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ adalah panjang sel

$F_{i+\frac{1}{2}}^n$: aproksimasi dari nilai rata-rata fluks sepanjang permukaan sel pada $x = x_{i+\frac{1}{2}}$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt$$

Bentuk integral dari hukum kekekalan

$$\frac{d}{dt} \int_{C_i} q(x, t) dx = f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) - f(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t))$$

dapat ditulis sebagai skema volume hingga

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 \quad (2)$$

Skema Lax-Friedrichs

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [f(Q_{i+1}^n) + f(Q_i^n)] - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (Q_{i+1}^n - Q_i^n)$$

Skema volume hingga

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{2} (Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(Q_{i+1}^n) - f(Q_{i-1}^n))$$

Finite Difference Method VS Finite Volume Method

Finite Difference Method	Finite Volume Method
<ol style="list-style-type: none">1. Komputasi didasarkan pada titik demi titik $Q_i^n \approx q(x_i, t^n)$2. Menggunakan beda hingga untuk mengaproksimasi turunan	<ol style="list-style-type: none">1. Komputasi didasarkan pada nilai rata-rata sel $Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x, t^n) dx$2. Menggunakan bentuk integral untuk mendapatkan persamaan dan skema numerik

Uji akurasi

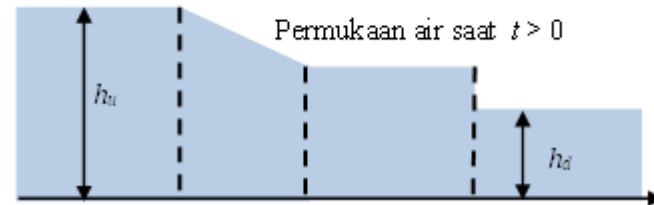
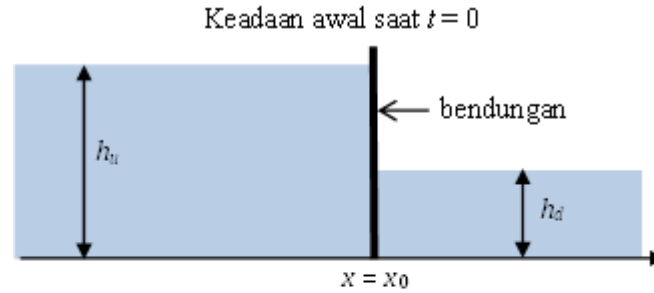
Untuk menguji akurasi dari solusi numerik, hasil numerik dapat dibandingkan dengan:

- Data percobaan laboratorium
- Solusi numerik yang dihitung dengan metode numerik yang amat akurat
- Perilaku fisis

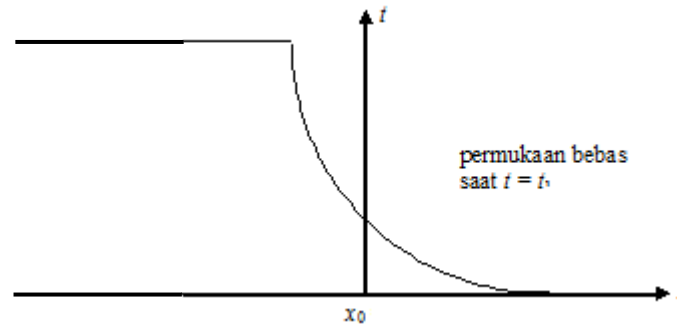
Dambreak problem



<https://www.youtube.com/watch?v=WrTp3JDG9Fs>



Dambreak over wet bed



Dambreak over dry bed

Model matematika: *SWE 1D*

$$h_t + (hu)_x = 0$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)_x = 0$$

Syarat awal $u(x,0) = 0$

$$h(x,0) = \begin{cases} h_u, & x < x_0 \\ h_d, & x > x_0 \end{cases}$$

Solusi analitik: ***Dambreak over dry bed***
(Ritter, 1892)

$$h(x) = \begin{cases} h_u, & x \leq -t\sqrt{gh_u} \\ \frac{4}{9g} \left(\sqrt{gh_u} - \frac{x}{2t} \right)^2, & -t\sqrt{gh_u} < x \leq 2t\sqrt{gh_u} \\ 0, & x \geq 2t\sqrt{gh_u} \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x = -t\sqrt{gh_u} \\ u_R = \frac{2}{3} \left(\sqrt{gh_u} + \frac{x}{t} \right), & -t\sqrt{gh_u} < x \leq 2t\sqrt{gh_u} \\ 0, & x \geq 2t\sqrt{gh_u} \end{cases}$$

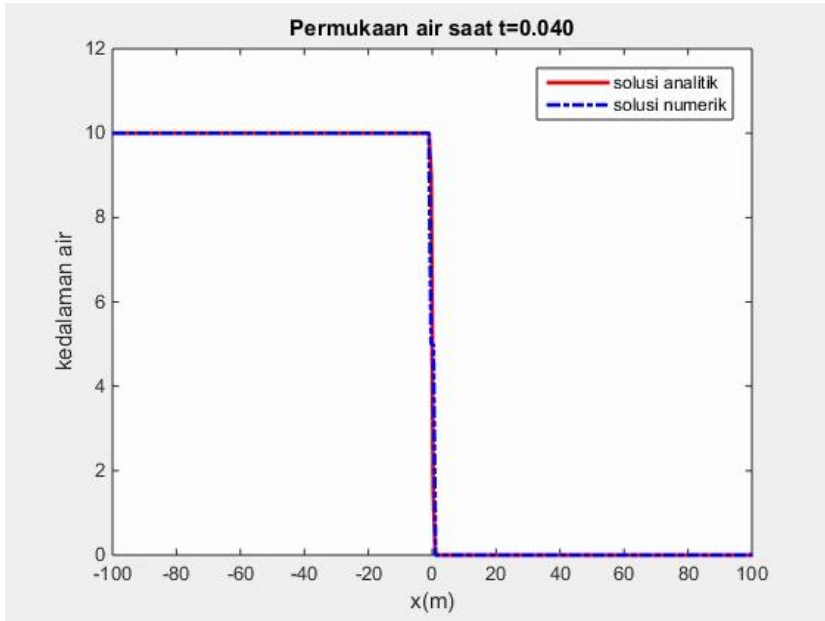
Solusi analitik: ***Dambreak over wet bed***
(Stoker, 1948)

$$h(x) = \begin{cases} h_u, & x \leq -t\sqrt{gh_u} \\ h_3 = \frac{4}{9g} \left(\sqrt{gh_u} - \frac{x}{2t} \right)^2, & -t\sqrt{gh_u} < x \leq t(u_2 - \sqrt{gh_2}) \\ h_2 = \frac{h_d}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8\xi^2}{gh_d}} - 1 \right), & t(u_2 - \sqrt{gh_2}) < x < t\xi \\ h_d, & x \geq t\xi \end{cases}$$

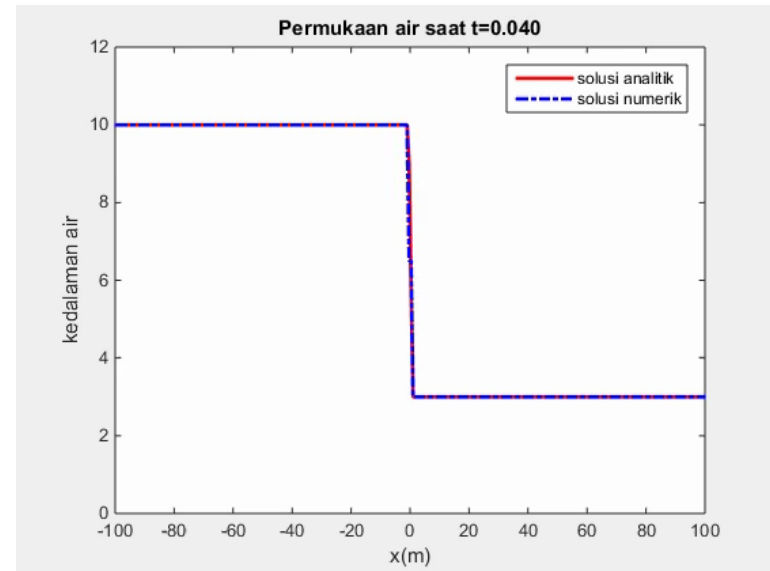
$$u(x) = \begin{cases} 0, & x = -t\sqrt{gh_u} \\ u_3 = \frac{2}{3} \left(\sqrt{gh_u} + \frac{x}{t} \right), & -t\sqrt{gh_u} < x \leq t(u_2 - \sqrt{gh_2}) \\ u_2 = \xi - \frac{gh_d}{4\xi} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\xi^2}{gh_d}} \right), & t(u_2 - \sqrt{gh_2}) < x < t\xi \\ 0, & x \geq 2t\sqrt{gh_u} \end{cases}$$

$$\xi = 2\sqrt{gh_u} + \frac{gh_d}{4\xi} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\xi^2}{gh_d}} \right) - \left(2gh_d \sqrt{1 + \frac{8\xi^2}{gh_d}} - 2gh_d \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dambreak over dry bed



Dambreak over wet bed





Terima
kasih