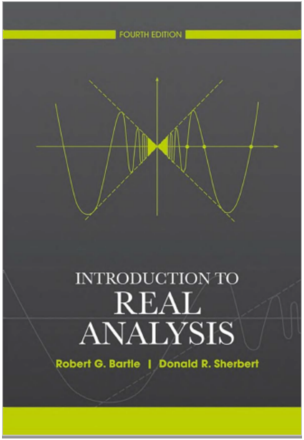
Barisan dalam Analisis Real

Esih Sukaesih

July 21, 2020

Seri Kuliah Umum
Analisis Real
UIN Maulana Malik Ibrahim Malang


NINTH EDITION
Calculus
Varberg
Purcell
Rigdon


FOURTH EDITION
INTRODUCTION TO
REAL
ANALYSIS
Robert G. Bartle | Donald R. Sherbert

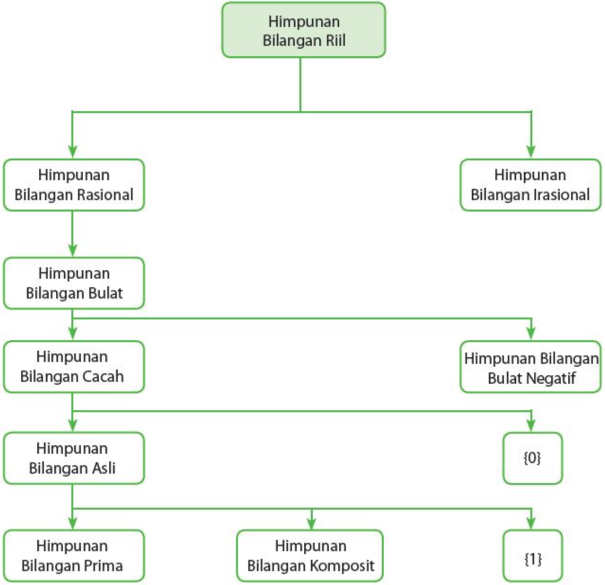
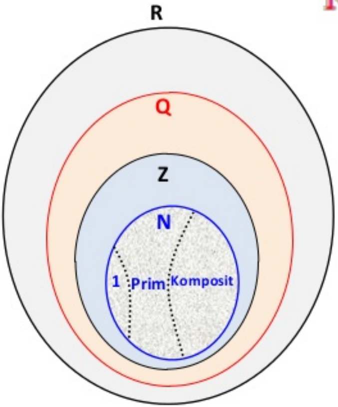

Himpunan Bilangan Riil
Himpunan Bilangan Rasional
Himpunan Bilangan Irasional
Himpunan Bilangan Bulat
Himpunan Bilangan Cacah
Himpunan Bilangan Bulat Negatif
Himpunan Bilangan Asli
{0}
Himpunan Bilangan Prima
Himpunan Bilangan Komposit
{1}

Diagram Venn Himpunan Bilangan Real

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$



R = himpunan bilangan real

Q = himpunan bilangan rasional

Z = himpunan bilangan bulat

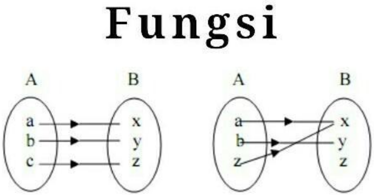
N = himpunan bilangan asli

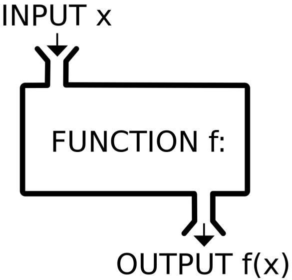
Definisi Fungsi

Misalkan himpunan A dan B. Sebuah fungsi dari A ke B adalah himpunan f dari pasangan berurut dari $A \times B$ sehingga untuk setiap $a \in A$ terdapat tepat satu $b \in B$ dengan $(a, b) \in f$.
(Dengan kata lain, Jika $(a, b) \in f$ dan $(a, b') \in f$, maka $b = b'$.)

Definisi Fungsi

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan tiap objek x dalam satu himpunan, yang disebut daerah asal (domain), dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil.


Fungsi
A
B
a
b
c
x
y
z
A
B
a
b
z
x
y
z


INPUT x
FUNCTION f:
OUTPUT f(x)

Definisi Barisan Bilangan Real

Barisan bilangan real adalah fungsi yang terdefinisi atas himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ dengan daerah hasil termuat di himpunan bilangan real $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{llcl} X: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & \{1,2,3,\ldots\} & \to & \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \\ & 1 & \mapsto & x_1 \\ & 2 & \mapsto & x_2 \\ & 3 & \mapsto & x_3 \\ & & \vdots & \\ & n & \mapsto & x_n \\ & & \vdots & \end{array}$$

$X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$

Notasi dan Contoh Barisan

Notasi Barisan

$$X, \qquad (x_n), \qquad (x_n : x \in \mathbb{N}), \qquad \{x_n\}, \qquad \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

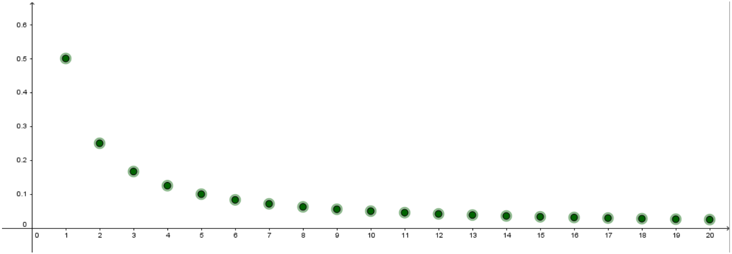
Contoh Barisan

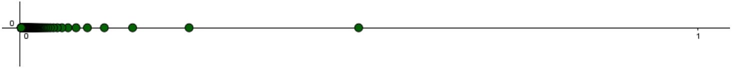
$$X = (\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N})$$

$$\begin{array}{rccc} X: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & 1 & \mapsto & \frac{1}{2} \\ & 2 & \mapsto & \frac{1}{4} \\ & 3 & \mapsto & \frac{1}{6} \\ & & \vdots & \\ & n & \mapsto & \frac{1}{2n} \\ & & \vdots & \end{array}$$

$(x_n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots)$

$$(x_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots\right)$$





Contoh Barisan

$(x_n) = (2n : n \in \mathbb{N})$ dapat juga dituliskan sebagai barisan iterasi berikut ini:

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = x_n + 2$$

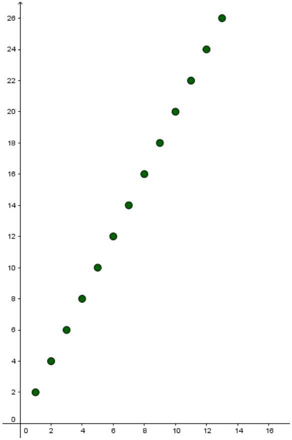
atau sebagai barisan iterasi berikut:

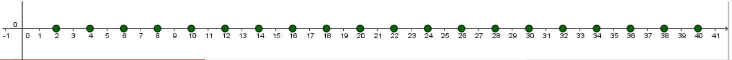
$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = x_1 + x_n$$

$(x_n) = (2, 4, 6, \ldots)$

Contoh Barisan

$(x_n) = (2, 4, 6, \ldots)$

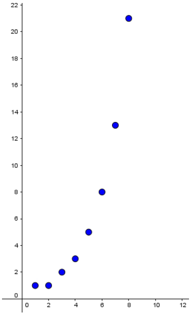


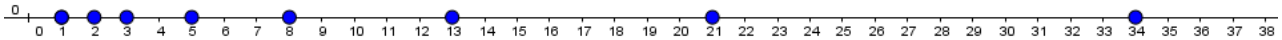


Barisan Fibonacci

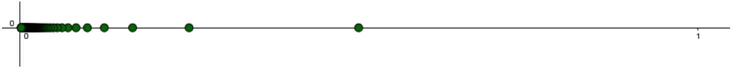
$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_{n+1} = f_{n-1} + f_n \qquad (n \geq 2)$$

$(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$

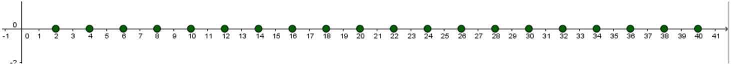




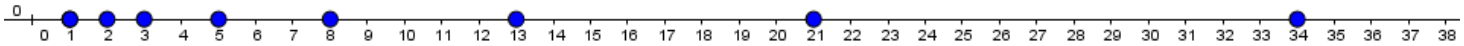
$$(x_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots\right)$$



$$(x_n) = (2, 4, 6, \ldots)$$



$$(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$$



Definisi Barisan Konvergen

Sebuah barisan bilangan real $X = (x_n)$ disebut konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau x adalah limit dari (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, bentuk $|x_n - x| < \varepsilon$.
Jika sebuah barisan mempunyai limit, maka barisan disebut barisan konvergen. Jika barisan tidak mempunyai limit, barisan disebut barisan divergen.

Definisi Barisan Konvergen

Sebuah barisan bilangan real $X = (x_n)$ disebut konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, bentuk $|x_n - x| < \varepsilon$.

Perhatikan

Notasi $K(\varepsilon)$ bergantung pada ε.
Untuk selanjutnya $K(\varepsilon)$ akan ditulis dengan K.
Pada umumnya, untuk nilai ε yang sangat kecil terkait dengan bilangan K yang cukup besar untuk menjamin jarak antara x_n dan x yang kurang dari ε untuk $n \geq K = K(\varepsilon)$.

Notasi Jika suatu barisan $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mempunyai limit $x \in \mathbb{R}$, digunkan notasi

$$\lim X = x \qquad \text{atau} \qquad \lim(x_n) = x$$

atau simbol

$$x_n \to x, \qquad \text{jika} \qquad n \to \infty$$

Contoh Barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$

Akan ditunjukkan $\lim(\frac{1}{n}) = 0$

Definisi Barisan Konvergen

Sebuah barisan bilangan real $X = (x_n)$ disebut konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, bentuk $|x_n - x| < \varepsilon$.

Untuk membuat bukti sesuai dengan Definisi, harus bisa menyebutkan nilai K yang sesuai dengan setiap ε yang dipilih.

Contoh Barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$

Akan ditunjukkan $\lim(\frac{1}{n}) = 0$

Definisi Barisan Konvergen

Sebuah barisan bilangan real $X = (x_n)$ disebut konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, bentuk $|x_n - x| < \varepsilon$.

backward/kotretan

Tujuan $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, akan ditentukan K yang sesuai.

$$\begin{aligned} |x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} &< n \end{aligned}$$

$$\text{sehingga dipilih} \quad \frac{1}{\varepsilon} < K \quad \text{atau} \quad K > \frac{1}{\varepsilon}$$

Contoh Barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$

Akan ditunjukkan $\lim(\frac{1}{n}) = 0$

Definisi Barisan Konvergen

Sebuah barisan bilangan real $X = (x_n)$ disebut konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, bentuk $|x_n - x| < \varepsilon$.

Bukti

Dipilih $x = 0 \in \mathbb{R}$, jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, memenuhi

$$\begin{aligned}
|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| &= \frac{1}{n} \\
&\leq \frac{1}{K} && , n \geq K \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} \\
&< \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} && , K > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{K} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Contoh Barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

Akan ditunjukkan $\lim \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right) = 0$

Definisi Barisan Konvergen

Sebuah barisan bilangan real $X = (x_n)$ disebut konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, bentuk $|x_n - x| < \varepsilon$.

backward/kotretan

Tujuan $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{\ln(n+1)} - 0\right| < \varepsilon$, akan ditentukan K yang sesuai.

$$\begin{aligned} |x_n - 0| = \left|\frac{1}{\ln(n+1)} - 0\right| = \frac{1}{\ln(n+1)} &< \frac{1}{\ln(n)} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} &< \ln(n) \\ \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\varepsilon}} &< e^{\ln(n)} = n \\ \text{sehingga dipilih } e^{\frac{1}{\varepsilon}} < K \quad \text{atau} \quad K &> e^{\frac{1}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Contoh Barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

Akan ditunjukkan $\lim \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right) = 0$

Definisi Barisan Konvergen

Sebuah barisan bilangan real $X = (x_n)$ disebut konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, bentuk $|x_n - x| < \varepsilon$.

Bukti

Dipilih $x = 0 \in \mathbb{R}$, jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon) > e^{\frac{1}{\varepsilon}}$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, memenuhi

$$\begin{aligned}
|x_n - 0| = \left|\frac{1}{\ln(n+1)} - 0\right| = \left|\frac{1}{\ln(n+1)}\right| &< \frac{1}{\ln(n)} \\
&\leq \frac{1}{K} \qquad , n \geq K \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(K)} \\
&< \frac{1}{\ln(e^{\frac{1}{\varepsilon}})} \qquad , K > e^{\frac{1}{\varepsilon}} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(K)} < \\
&= 1/\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Operasi Barisan

Misalkan barisan bilangan real $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$, didefinisikan

$$\begin{array}{rrcll} \text{Penjumlahan barisan} & X+Y & = & (x_n + y_n) & \\ \text{Selisih barisan} & X-Y & = & (x_n - y_n) & \\ \text{Perkalian barisan} & XY & = & (x_n y_n) & \\ \text{Pembagian barisan} & X/Z & = & (x_n / z_n) & \text{dengan } z_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Contoh Operasi Barisan

Misalkan barisan bilangan real
$X = (x_n) = (2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots)$ dan
$Y = (y_n) = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$, didefinisikan

$$\begin{aligned}
X + Y = (x_n + y_n) &= (2 + \frac{1}{1}, 4 + \frac{1}{2}, 6 + \frac{1}{3}, \ldots, 2n + \frac{1}{n}, \ldots) \\
X - Y = (x_n - y_n) &= (2 - \frac{1}{1}, 4 - \frac{1}{2}, 6 - \frac{1}{3}, \ldots, 2n - \frac{1}{n}, \ldots) \\
XY = (x_n y_n) &= (2 \cdot \frac{1}{1}, 4 \cdot \frac{1}{2}, 6 \cdot \frac{1}{3}, \ldots, 2n \cdot \frac{1}{n}, \ldots) \\
&= (2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots) \\
X/Y = (x_n/y_n) &= (2/\frac{1}{1}, 4/\frac{1}{2}, 6/\frac{1}{3}, \ldots, 2n/\frac{1}{n}, \ldots) \\
&= (2, 8, 18, \ldots, 2n^2, \ldots)
\end{aligned}$$

Teorema Limit

(a) Misalkan barisan bilangan real $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ yang secara berurutan konvergen ke x dan y,
dan misalkan $c \in \mathbb{R}$.
Maka barisan

$$\begin{aligned} X+Y &\quad \text{konvergen ke} \quad x+y \\ X-Y &\quad \text{konvergen ke} \quad x-y \\ XY &\quad \text{konvergen ke} \quad xy \\ cX &\quad \text{konvergen ke} \quad cx \end{aligned}$$

(b) Misalkan barisan bilangan real $X = (x_n)$ konvergen ke x dan barisan bilangan real tak nol $Z = (z_n)$ konvergen ke $z \neq 0$, maka pembagian barisan

$$X/Z \qquad \text{konvergen ke} \qquad x/z$$

Contoh 1 Teorema Limit

Tentukan kekonvergenan barisan $x_n = \frac{n^2}{n+1}$.

Cara 1

$\frac{n^2}{n+1}$ dapat dituliskan sebagai

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}\frac{1/n}{1/n} = \frac{\frac{n^2}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{1+\frac{1}{n}}$$

Contoh 1 Teorema Limit

Tentukan kekonvergenan barisan $x_n = \frac{n^2}{n+1}$.

Cara 1

$\frac{n^2}{n+1}$ dapat dituliskan sebagai

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}\frac{1/n}{1/n} = \frac{\frac{n^2}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{1+\frac{1}{n}}$$

Jadi diperoleh

$$\lim(x_n) = \lim\left(\frac{n^2}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{n}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{\lim(n)}{\lim(1)+\lim(\frac{1}{n})} = \frac{\infty}{1+0} = \infty$$

Contoh 1 Teorema Limit

Tentukan kekonvergenan barisan $x_n = \frac{n^2}{n+1}$.

Cara 2

$\frac{n^2}{n+1}$ dapat dituliskan sebagai

$$\frac{n^2}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1}$$

Contoh 1 Teorema Limit

Tentukan kekonvergenan barisan $x_n = \frac{n^2}{n+1}$.

Cara 2

$\frac{n^2}{n+1}$ dapat dituliskan sebagai

$$\frac{n^2}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1}$$

Jadi diperoleh

$$\begin{aligned} \lim(x_n) &= \lim\left(n - 1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \lim(n) - \lim(1) + \lim\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \infty - 1 + 0 = \infty \end{aligned}$$

Contoh 2 Teorema Limit

Tentukan kekonvergenan barisan $x_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$.

Cara 1

$\frac{2n^2+3}{n^2+1}$ dapat dituliskan sebagai

$$\frac{2n^2+3}{n^2+1} = \frac{2n^2+3}{n^2+1}\,\frac{1n^2}{1/n^2} = \frac{\frac{2n^2+3}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}} = \frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

Jadi diperoleh

$$\begin{aligned}\lim(x_n) &= \lim\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)\\ &= \frac{\lim(2)+\lim(\frac{3}{n^2})}{\lim(1)+\lim(\frac{1}{n^2})}\\ &= \frac{2+0}{1+0} = 2\end{aligned}$$

Contoh 2 Teorema Limit

Tentukan kekonvergenan barisan $x_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$.

Cara 2

$\frac{2n^2+3}{n^2+1}$ dapat dituliskan sebagai

$$\frac{2n^2+3}{n^2+1} = 2 + \frac{1}{n^2+1}$$

Jadi diperoleh

$$\begin{aligned} \lim(x_n) &= \lim\left(2 + \frac{1}{n^2+1}\right) \\ &= \lim(2) + \lim\left(\frac{1}{n^2+1}\right) \\ &= 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

Contoh 3 Teorema Limit

Tentukan kekonvergenan barisan $x_n = (2 + 1/n)^2$.
Jadi diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim(x_n) &= \lim\left((2+1/n)^2\right) \\
&= \left(\lim(2+1/n)\right)^2 \\
&= \left(\lim(2) + \lim(1/n)\right)^2 \\
&= (2+0)^2 = 4
\end{aligned}$$

Definisi Barisan Cauchy

Sebuah barisan bilanga real $X = (x_n)$ disebut barisan Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $H(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n, m \geq H(\varepsilon)$, barisan x_n, x_m memenuhi $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Contoh 1 Barisan Cauchy

Akan ditunjukkan barisan $x_n = \frac{1}{n}$ adalah barisan Cauchy.

Definisi Barisan Cauchy

Sebuah barisan bilanga real $X = (x_n)$ disebut barisan Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $H(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n, m \geq H(\varepsilon)$, barisan x_n, x_m memenuhi $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

backward/kotretan

Tujuan $|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$, akan ditentukan H yang sesuai.

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| &= \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| \\
&< \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\right|, \quad \text{misalkan} \quad m > n \Leftrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \\
&= \frac{2}{n} < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n
\end{aligned}$$

sehingga dipilih $\quad \frac{2}{\varepsilon} < H \quad$ atau $\quad H > \frac{2}{\varepsilon}$

Contoh 1 Barisan Cauchy

Akan ditunjukkan barisan $x_n = \frac{1}{n}$ adalah barisan Cauchy.

Definisi Barisan Cauchy

Sebuah barisan bilanga real $X = (x_n)$ disebut barisan Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $H(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n, m \geq H(\varepsilon)$, barisan x_n, x_m memenuhi $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Bukti

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $H(\varepsilon) = H > \frac{2}{\varepsilon}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq H$, barisan x_n, x_m memenuhi

$$
\begin{aligned}
|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| &= \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| \\
&< \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| && \text{,misalkan} \quad m > n \Leftrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \\
&= \frac{2}{n} < \frac{2}{H} && \text{,karena} \quad n > H \Leftrightarrow \frac{2}{n} < \frac{2}{H} \\
&< \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} && \text{,karena} \quad H > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{2}{H} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Teorema Kriteria Cauchy Konvergen

Sebuah barisan bilangan real merupakan barisan konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut merupakan barisan Cauchy.

Definisi Barisan Kontraktif

Sebuah barisan bilangan real $X = (x_n)$ disebut barisan kontraktif, jika terdapat konstanta C, $0 < C < 1$, sehingga memenuhi

$$|x_{n+2} - x_{x+1}| \leq C|x_{n+1} - x_x|$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Bilangan C disebut konstanta kontraktif.

Teorema

Setiap barisan kontraktif adalah barisan Cauchy, akibatnya barisan tersebut merupakan barisan konvergen.

Materi barisan lainnya

- Ketunggalan limit barisan
- Ekor barisan
- Keterbatasan barisan konvergen dan Teorema apit
- Barisan monoton
- Barisan bagian dan Teorema Bolzano-Weierstrass
- Deret

Definisi Limit Fungsi

The Definition of the Limit

4.1.4 Definition Let $A \subseteq \mathbb{R}$, and let c be a cluster point of A. For a function $f : A \to \mathbb{R}$, a real number L is said to be a **limit of f at c** if, given any $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that if $x \in A$ and $0 < |x - c| < \delta$, then $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Figure: Definisi di buku Analisis Real

Definition **Precise Meaning of Limit**

To say that $\lim_{x \to c} f(x) = L$ means that for each given $\varepsilon > 0$ (no matter how small) there is a corresponding $\delta > 0$ such that $|f(x) - L| < \varepsilon$, provided that $0 < |x - c| < \delta$; that is,

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Figure: Definisi di buku Kalkulus

Definisi Limit Fungsi

Definisi Limit Fungsi

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, dan c adalah titik kluster di A.
Misalkan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, suatu bilangan real L disebut limit fungsi f di titik c, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat δ sehingga jika untuk $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$, memenuhi

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Contoh Limit Fungsi

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$.

Definisi Limit Fungsi

$\lim_{x \to c} f(x) = L$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat δ sehingga jika untuk $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Backward/Kotretan

Tujuan $|f(x) - L| = |x^2 - c^2| < \varepsilon$, akan ditentukan δ yang sesuai.

$$|f(x) - L| = |x^2 - c^2| = |x - c||x + c| < \varepsilon$$

Misalkan $|x - c| < 1$, sehingga

$$\begin{aligned} |x| - |c| \leq |x - c| &< 1 \\ |x| &\leq |c| + 1. \end{aligned}$$

Jadi diperoleh $|x + c| \leq |x| + |c| \leq (|c| + 1) + |c| = 2|c| + 1$. Akibatnya

$$\begin{aligned} |f(x) - L| = |x - c||x + c| = |x - c|(2|c| + 1) &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow |x - c| &< \frac{\varepsilon}{(2|c| + 1)} \\ \text{sehingga dipilih} \quad \delta &< \frac{\varepsilon}{(2|c| + 1)} \end{aligned}$$

Contoh Limit Fungsi

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$.

Definisi Limit Fungsi

$\lim_{x \to c} f(x) = L$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat δ sehingga jika untuk $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Bukti

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang, maka dapat dipilih $\delta < \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{(2|c|+1)} \right\}$, sehingga untuk $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$ memenuhi

$$\begin{aligned} |f(x) - L| = |x^2 - c^2| &= |x - c||x + c| \\ &= |x - c|(2|c| + 1) \\ &< \frac{\varepsilon}{(2|c| + 1)}(2|c| + 1) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Teorema Kriteria Barisan

Misalkan $f : A \to \mathbb{R}$ dan c adalah titik kluster di A. Maka pernyataan berikut ekuivalen.

(i) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.

(ii) Untuk setiap barisan $(x_n) \subseteq A$ yang konvergen ke c dengan $x_n \neq c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

Contoh Limit Fungsi dengan Kriteria Barisan

Akan ditunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to c} x^2 = c^2$.

Jawab

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} &= \lim_{n\to\infty}((x_n)^2) \qquad ,\text{dengan} \quad x_n \to c \quad \text{jika} \quad n \to \infty \\
&= \left(\lim_{n\to\infty}(x_n)\right)^2 \qquad ,\text{dengan} \quad x_n \to c \quad \text{jika} \quad n \to \infty \\
&= c^2
\end{aligned}$$

Kriteria Divergen

Misalkan $f : A \to \mathbb{R}$ dan c adalah titik kluster di A. Maka pernyataan berikut ekuivalen.

(i) Misalkan $L \in \mathbb{R}$, maka L bukan limit f di c jika dan hanya jika terdapat barisan $(x_n) \subseteq A$ dengan $x_n \neq c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan barisan (x_n) konvergen ke c tetapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke L.

(ii) Fungsi f tidak mempunyai limit di c jika dan hanya jika terdapat barisan $(x_n) \subseteq A$ yang konvergen ke c dengan $x_n \neq c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ tetapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen di $\mathbb{R}$.

Contoh Kriteria Divergen

Akan ditunjukkan $\lim_{x\to 0}(1/x)$ tidak ada.
Pilih barisan $(x_n) = (1/n) \to 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(1/x) &= \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{x_n}) \quad \text{, dengan} \quad x_n \to 0 \quad \text{jika} \quad n \to \infty \\
&= \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\frac{1}{n}}) \quad \text{, dengan} \quad (\frac{1}{n}) \to 0 \quad \text{jika} \quad n \to \infty \\
&= \lim_{n\to\infty}(n) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Definisi Fungsi Kontinu

5.1.1 Definition Let $A \subseteq \mathbb{R}$, let $f : A \to \mathbb{R}$, and let $c \in A$. We say that f is **continuous at** c if, given any number $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that if x is any point of A satisfying $|x - c| < \delta$, then $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

If f fails to be continuous at c, then we say that f is **discontinuous at** c.

Remarks If $c \in A$ is a cluster point of A, then a comparison of Definitions 4.1.4 and 5.1.1 show that f is continuous at c if and only if

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x).$$

Thus, if c is a cluster point of A, then three conditions must hold for f to be continuous at c:

(i) f must be defined at c (so that $f(c)$ makes sense),

(ii) the limit of f at c must exist in $\mathbb{R}$ (so that $\lim_{x \to c} f(x)$ makes sense), and

(iii) these two values must be equal.

Figure: Definisi di buku Analisis Real

Definition Continuity at a Point

Let f be defined on an open interval containing c. We say that f is **continuous** at c if

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

We mean by this definition to require three things:

1. $\lim_{x \to c} f(x)$ exists,
2. $f(c)$ exists (i.e., c is in the domain of f), and
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

If any one of these three fails, then f is **discontinuous** at c.

Figure: Definisi di buku Kalkulus

Kontinu dengan Kriteria Barisan

Misalkan $f : A \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu di $c \in A$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan $(x_n) \subseteq A$ yang konvergen ke c, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$.

Kriteria Diskontinu

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$. Jika $f : A \to \mathbb{R}$ dan $c \in A$, maka f tidak kontinu di c jika dan hanya jika terdapat barisan $(x_n) \subseteq A$ yang konvergen ke c tetapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke $f(c)$.

Definisi Kontinu Seragam

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f : A \to \mathbb{R}$. Fungsi f disebut kontinu seragam pada A, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sehingga untuk setiap $x, u \in A$ dengan $|x - u| < \delta(\varepsilon)$ memenuhi $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

Kriteria Tidak Kontinu Seragam

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f : A \to \mathbb{R}$. Pernyataan berikut ekuivalen.

(i) f tidak konvergem seragam di A.

(ii) Terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat x_δ, u_δ di A dengan $|x_\delta - u_\delta| < \delta$ tetapi $|f(x) - f(u)| \geq \varepsilon_0$.

(iii) Terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan dua barisan $(x_n), (u_n)$ di A dengan $\lim(x_n - u_n) = 0$ tetapi $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Teorema

Jika $f : a \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu seragam di $A \subseteq \mathbb{R}$ dan (x_n) adalah barisan Cauchy di A, maka $(f(x_n))$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$.

Contoh Fungsi Kontinu Seragam

Akan ditunjukkan bahwa $f(x) = 1/x$ kontinu seragam di himpunan $A = [a, \infty)$ untuk suatu konstanta positif a.

Kotretan

Tujuan $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$, akan ditentukan δ untuk $|x - u| < \delta$ yang memenuhi.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(u)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{u}\right| = \left|\frac{u-x}{xu}\right| = \frac{1}{xu}|u-x| \le \frac{1}{aa}|u-x| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow |u-x| &< a^2\varepsilon \\ \text{sehingga dipilih} \qquad \delta &< a^2\varepsilon \end{aligned}$$

Contoh Fungsi Kontinu Seragam

Akan ditunjukkan bahwa $f(x) = 1/x$ kontinu seragam di himpunan $A = [a, \infty)$ untuk suatu konstanta positif a.

Bukti

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang, maka dapat dipilih $\delta < a^2\varepsilon$ sehingga untuk setiap $u, x \in A$ dengan $|x - u| < \delta$ memenuhi

$$\begin{aligned} |f(x) - f(u)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{u}\right| &= \left|\frac{u - x}{xu}\right| \\ &= \frac{1}{xu}|u - x| \\ &\leq \frac{1}{aa}|u - x| \\ &< \frac{1}{aa}a^2\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Contoh Fungsi tidak Kontinu Seragam

Fungsi $f(x) = 1/x$ tidak kontinu seragam di himpunan $A = [0, \infty)$. Pilih $\varepsilon_0 = 1$ dan $x_n = \frac{1}{n}$ dan $u_n = \frac{1}{n+1}$ sehingga

$$\lim(x_n - u_n) = \lim\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = 0,$$

tetapi

$$|f(x_n) - f(u_n)| = \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{u_n}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right| = |n - (n+1)| = 1$$


Terima kasih

- Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert, Introduction to Real Analysis, fourth edition, John Wiley and Sons, Inc., 2011.
- D. Varberg, E.J. Purcell, and S.E. Rigdon, Calculus 9th edition, 2010.