

ALJABAR

1. Jika x dan y adalah bilangan positif dan $2x^2 + 3xy - 7x = 1$ dan $3y^2 + 2xy - 7y = 2$,
Tentukan nilai dari $2x + 3y = \dots$

Jawab :

$$2x^2 + 3xy - 7x = 1$$

$$x(2x + 3y - 7) = 1$$

$$3y^2 + 2xy - 7y = 2$$

$$y(3y + 2x - 7) = 2$$

Karena x dan y adalah bilangan positif, maka haruslah $x = 1$, dan $2x + 3y - 7 = 1$ maka
 $2x + 3y = 8$

2. Tentukan semua solusi bilangan real persamaan $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$.

(Catatan : Untuk sebarang bilangan real α , notasi $\lfloor \alpha \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan α , sedangkan $\lceil \alpha \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan α .)

Jawab :

- Untuk $x^2 \leq 1001$ maka $\lfloor x^2 \rfloor \leq 1001$ dan $\lceil x^2 \rceil \leq 1001$ sehingga $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil \leq 2002$
- Untuk $x^2 \geq 1002$ maka $\lfloor x^2 \rfloor \geq 1002$ dan $\lceil x^2 \rceil \geq 1002$ sehingga $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil \geq 2004$
- Untuk $1001 < x^2 < 1002$ maka $\lfloor x^2 \rfloor = 1001$ dan $\lceil x^2 \rceil = 1002$ sehingga $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$

Maka persamaan $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$ hanya dipenuhi oleh $1001 < x^2 < 1002$

$\therefore \lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$ hanya dipenuhi oleh $\sqrt{1001} < x < \sqrt{1002}$ atau $-\sqrt{1002} < x < -\sqrt{1001}$

GEOMETRI

1. Di dalam suatu lingkaran L_1 berjari-jari 1 dan berpusat di titik asal dilukis suatu lingkaran L_2 yang bersinggungan dengan lingkaran L_1 , dan dengan sumbu- x dan sumbu- y positif. Jari-jari lingkaran L_2 adalah?

Jawab :

OB adalah jari-jari lingkaran besar dengan pusat O .

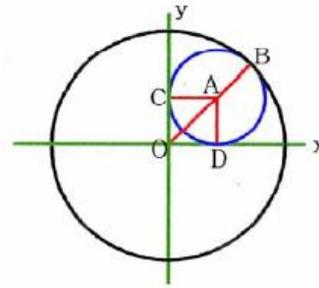
Misal jari-jari lingkaran dalam = r , maka $AB = r$.

Karena $OD = OC = r$ maka $OA = r\sqrt{2}$

$$OB = OA + AB$$

$$1 = r\sqrt{2} + r$$

$$\therefore r = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$$



2. Titik P terletak di dalam persegi $ABCD$ demikian rupa, sehingga $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Berapakah besar sudut APB ?

Jawab :

Misalkan $AP = a$ maka $BP = 2a$ dan $CP = 3a$

Dengan berpusat di B , titik P diputar sejauh 90° menjadi titik P' , maka $\triangle BPP'$ adalah segitiga siku-siku sama kaki.

$$\angle BPP' = 45^\circ \text{ dan } PP' = 2a\sqrt{2}$$

$\triangle BPC \cong \triangle AP'B$ sehingga $AP' = 3a$

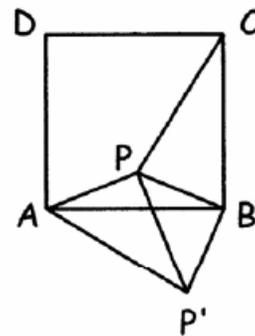
$$(AP')^2 = (AP)^2 + (PP')^2 - 2(AP)(PP') \cos \angle APP'$$

$$(3a)^2 = (a)^2 + (2a\sqrt{2})^2 - 2(a)(2a\sqrt{2}) \cos \angle APP'$$

$$\cos \angle APP' = 0$$

$$\angle APP' = 90^\circ$$

$$\therefore \angle APB = \angle APP' + \angle BPP' = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$



3. Pada sebuah segienam beraturan, berapakah rasio panjang antara diagonal terpendek terhadap diagonal terpanjang ?

Jawab :

Misal sisi segienam beraturan tersebut adalah a dan O adalah pusat segienam beraturan.

Karena bangun adalah segienam beraturan maka berlaku :

$$OA = OB = OC = OD = OE = OF = AB = BC = CD = DE = EF = AF = a$$

$$\angle AFO = \angle OFE = 60^\circ$$

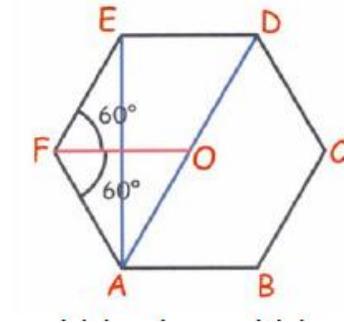
$$(AE)^2 = (AF)^2 + (FE)^2 - 2(AF)(FE) \cos 120^\circ$$

$$(AE)^2 = a^2 + a^2 - 2(a)(a) \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(AE) = a\sqrt{3}$$

$$(AD) = (AO) + (OD) = a + a = 2a$$

$$(AE) : (AD) = \sqrt{3} : 2$$



∴ Rasio panjang diagonal terpendek terhadap diagonal terpanjang adalah $\sqrt{3} : 2$

STATISTIKA

1. Dari sepuluh orang siswa akan dibentuk 5 kelompok, masing-masing beranggota dua orang. Berapa banyaknya cara membentuk kelima kelompok ini?

Jawab :

Pilih salah satu siswa. Banyaknya cara memansangkan siswa tersebut dengan siswa lain adalah C_1^9 . Pilih salah satu siswa dari 8 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah C_1^7 . Pilih salah satu siswa dari 6 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa lain adalah C_1^5 . Pilih salah satu dari 4 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah C_1^3 . Sisanya adalah 2 orang siswa yang tidak dapat dipilih lagi.

Banyaknya cara membentuk kelima kelompok adalah $C_1^9 \cdot C_1^7 \cdot C_1^5 \cdot C_1^3 \cdot 1 = 945$.

\therefore Banyaknya cara membentuk kelima kelompok tersebut adalah 945.

2. Sebuah kotak berisi 6 bola merah dan 6 bola putih. Secara acak diambil dua bola sekaligus. Berapakah peluang untuk mendapatkan dua bola berwarna sama?

Jawab :

Dua bola berwarna sama bisa didapatkan dari keduanya berwarna merah atau keduanya berwarna putih.

$$P(A) = \frac{C_2^6 C_0^6}{C_2^{12}} + \frac{C_0^6 C_2^6}{C_2^{12}} = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$$

\therefore Peluang untuk mendapatkan dua bola berwarna sama adalah $\frac{5}{11}$.

KALKULUS

1. Suatu garis vertikal membagi segitiga dengan titik sudut $(0,0)$, $(1,1)$ dan $(9,1)$ menjadi dua daerah dengan luas yang sama. Apakah persamaan garis tersebut?

Jawab :

Misal persamaan garis vertikal tersebut adalah $x = k$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2}(9 - 1)(1 - 0) = 4$$

Persamaan garis melalui $(0,0)$ dan $(9,1)$ adalah $y = \frac{1}{9}x$

Untuk $x = k$ maka $y = \frac{1}{9}k$

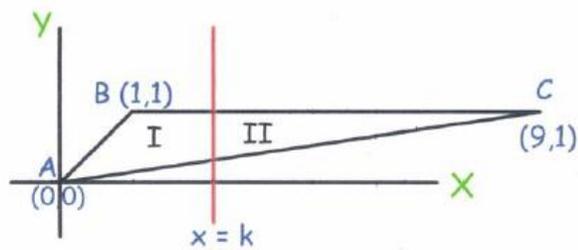
$$\text{Luas } \Delta \text{I} = \frac{1}{2} \text{Luas } \Delta ABC$$

$$\frac{1}{2}(9 - k) \left(1 - \frac{1}{9}k\right) = \frac{1}{2} \cdot 4$$

$$9 - k = \pm 6$$

$k = 3$ (memenuhi) atau $k = 15$ (tidak memenuhi bahwa $0 \leq k \leq 9$)

\therefore Persamaan garis vertikal tersebut adalah $x = 3$



2. Berapakah nilai x yang memenuhi ${}^4\log({}^2\log x) + {}^2\log({}^4\log x) = 2$?

Jawab :

$${}^4\log({}^2\log x) + {}^2\log({}^4\log x) = 2$$

$${}^2\log({}^2\log x)^{\frac{1}{2}} + {}^2\log({}^2\log \sqrt{x}) = 2$$

$$\sqrt{{}^2\log x} \cdot \frac{1}{2} {}^2\log x = 2^2 = 4$$

$$({}^2\log x)^{\frac{3}{2}} = 8$$

$$x = 2^4$$

$$\therefore x = 16$$